

一种改进的高效粒子水平集法及其应用

田辉, 王琳琳, 叶阳辉, 李国君

(西安交通大学热流科学与工程教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对传统粒子水平集法效率较低, 难以应用于复杂工程问题的不足, 基于积分平均法及局部粒子初始化方法提出一种改进的高效粒子水平集法. 将虚拟粒子引入水平集法不仅可以抑制数值扩散, 而且可以降低传统方法对高精度离散格式的依赖性, 从而使得引入低阶、高效的积分平均法后界面捕捉精度仍保持二阶. 通过将粒子布置于界面局部曲率较大的区域, 有效地提高了粒子对界面的修正效率, 增加了界面光顺性. 改进的高效粒子水平集法能保持良好的鲁棒性, 在保证界面捕捉精度的同时显著提高计算效率, 计算效率约提高 90%.

关键词: 粒子水平集; 积分平均; 粒子初始化; 高效

中图分类号: TK9 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)11-0034-05

An Improved Particle Level Set Method with High-Efficiency and Its Applications

TIAN Hui, WANG Linlin, YE Yanghui, LI Guojun

(Key Laboratory of Thermal Fluid Science and Engineering of MOE, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to improve the efficiency of traditional particle level set method and to provide an effective way to solve complex engineering problems, an efficient particle level set method is presented by combining the integral average and the modified particle initialization technology for the accurate capturing of interfaces. The addition of particles to the level set method removes the difficulties from the numerical diffusion, and alleviates the need for computationally expensive high order accurate schemes. The integral average enables to evolve the level set function and to distribute particles into the regions with large curvature. The numerical results show that the improved numerical method retains good robustness; the accuracy of captured interface gets nearly second order; and the computational efficiency is enhanced by 90%.

Keywords: particle level set; integral average method; particle initialization; high-efficiency

相界面运动问题普遍存在于多相流、材料结晶、图像处理等领域. 由于相界面两侧理化等性能的巨大差异在实际问题中起着极其重要的作用, 使得相界面迁移特性的研究倍受关注. 为了准确描述相界面运动, 国内外学者发展了众多数值方法, 由于各单一方法存在缺陷, 因此混合方法的研究已逐渐成为此领域的研究热点. 粒子水平集法(Particle Level Set, PLS)^[1]采用无质量虚拟粒子来判定水平集法(Level Set, LS)^[2-3]所确定界面的准确性, 进而通过

逃逸粒子实现对距离函数的修正, 从而获得精确的界面、保证系统质量守恒. 文献[1]中为了保证界面捕捉精度, 推荐采用高精度格式离散方程中的对流项和时间项, 如五阶精度的 H-J WENO 格式、三阶 TVD 型龙格库塔离散格式. 另外, 为了保证对水平集方法确定的界面的修正效果, 需引入大量的虚拟粒子. 然而, 采用高精度的离散格式、引入大量的虚拟粒子, 在获得更好界面捕捉效果的同时也消耗了大量的计算资源(如内存、计算时间等), 因此 PLS

收稿日期: 2011-01-19. 作者简介: 田辉(1982—), 男, 博士生; 李国君(联系人), 男, 教授, 博士生导师. 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51076126).

网络出版时间: 2011-10-13

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20111013.1743.002.html>

方法在复杂工程实际问题领域的应用受到限制. 谷汉斌^[4]的计算结果显示,PLS 方法的界面捕捉精度较 LS 方法有显著的提高. Wang^[5]进一步改进了距离函数修正策略,但算法的计算效率仍有待提高.

本文为减少算法对计算资源的需求,便于工程应用,从降低离散格式精度、减少所需的无质量虚拟粒子数入手,提出一种以一阶精度的积分平均法求解距离函数附加方程、基于界面局部曲率来确定粒子初始化位置的改进的高效粒子水平集方法. 测试算例结果表明:求解距离函数附加方程并非必须采用高阶精度格式,改进的方法在保证界面捕捉精度的同时,显著提高了计算效率,计算时间大幅度减少. 另外,利用本文方法对二维溃坝问题进行了数值研究.

1 改进的高效粒子水平集方法

1.1 传统粒子水平集法简介

(1)水平集法求解界面. 二维计算域 Ω 内任意点到界面 Γ 的距离通过距离函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 表示, t 时刻界面所处位置可描述为 $\{\mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$, 速度场 $\mathbf{U}$ 作用下界面 Γ 的运动规律可由以下方程描述

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1)$$

界面的几何信息,如单位法向量、局部曲率可通过距离函数获得^[2-3]. 为保证 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 始终为距离函数,降低数值扩散,提高系统质量守恒性,本文采用 Sussman 等^[6]提出的方法对距离函数进行重新初始化

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = S(\phi_0)(1 - |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|) \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x})$$

式中: ϕ_0 为初始时刻距离函数; $S(\phi_0)$ 为一光滑的符号函数

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{(\phi_0^2 + (\Delta x^2))^{0.5}} \quad (3)$$

文献[1]为了获得更准确的距离函数,采用高精度的 H-J WENO 格式及 TVD 型龙格库塔法求解方程(1)及方程(2).

(2)粒子对界面的局部修正. 粒子水平集法是一种加厚的界面捕捉方法,分别在界面两侧 3 个网格宽度的范围内初始化粒子(每个二维网格 16 个),对距离函数进行修正. 粒子半径定义为

$$r_p = \begin{cases} r_{\max}, & S_p \phi(\mathbf{x}_p, t) > r_{\max} \\ S_p \phi(\mathbf{x}_p, t), & r_{\min} \leq S_p \phi(\mathbf{x}_p, t) \leq r_{\max} \\ r_{\min}, & S_p \phi(\mathbf{x}_p, t) < r_{\min} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $r_p, r_{\max}, r_{\min}$ 分别表示粒子半径及粒子半径的上下限; S_p 表示粒子符号(正粒子取 +1, 负粒子取 -1); $\mathbf{x}_p$ 为粒子位置; $\phi(\mathbf{x}_p, t)$ 为 t 时刻通过插值得到的粒子到界面的距离. 粒子在速度场 $\mathbf{U}$ 作用下运动,若某正粒子出现在负的一侧或负粒子出现在正的一侧,且其到界面的距离大于粒子半径则称此粒子为逃逸粒子(Escaped Particle). 分别利用正、负逃逸粒子修正相应区域的距离函数值,实现界面重构. 修正过程引入局部距离函数

$$\phi_p(\mathbf{x}) = S_p(r_p - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|) \quad (5)$$

同时,在当前时刻全场初始化 $\phi^+(\mathbf{x}, t) = \phi^-(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t)$, 其中 $\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi^-(\mathbf{x}, t)$ 分别表示正、负粒子对距离函数的修正

$$\left. \begin{aligned} \phi^+(\mathbf{x}, t) &= \max_{\forall p \in E^+} (\phi_p, \phi^+(\mathbf{x}, t)), \quad \phi(\mathbf{x}, t) > 0 \\ \phi^-(\mathbf{x}, t) &= \min_{\forall p \in E^-} (\phi_p, \phi^-(\mathbf{x}, t)), \quad \phi(\mathbf{x}, t) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

为增加算法的数值稳定性,在每个节点取

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \phi^+(\mathbf{x}, t), & |\phi^+(\mathbf{x}, t)| \leq |\phi^-(\mathbf{x}, t)| \\ \phi^-(\mathbf{x}, t), & |\phi^+(\mathbf{x}, t)| > |\phi^-(\mathbf{x}, t)| \end{cases} \quad (7)$$

1.2 改进的粒子水平集方法

(1)基于一阶积分平均法求解距离函数附加方程. 粒子水平集法通过准确地跟踪虚拟粒子运动轨迹来修正距离函数值,从而实现提高界面捕捉精度的目的. 此过程可抑制水平集法求解距离函数附加方程易出现数值扩散的问题,提高数值稳定性,降低算法对高阶离散格式的依赖性. 传统水平集法^[6]及 PLS 方法^[1]采用高精度但消耗大量计算资源的离散格式,如三阶 TVD 型龙格库塔法进行时间离散,空间上采用五阶 H-J WENO 格式. 本文尝试采用在时间及空间上均为一阶精度的积分平均法^[7]求解距离函数附加方程(1),并分析此求解方式对计算精度及效率的影响. 取被积函数的一阶泰勒展开,在结构化网格 $\mathbf{x}_{i,j} = (i\Delta x, j\Delta y), t^n = n\Delta t$ 上,本文采用的积分平均法可描述为

$$\begin{aligned} (\phi_{i,j}^{n+1})' &= \phi_{i,j}^n - r_1 \max(0, u)(\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) + \\ &0.5r_1 \Delta x \max(0, u)(r_1 u - 1)(S(x_{i,j}^n) - S(x_{i-1,j}^n)) - \\ &r_1 \min(0, u)(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n) + 0.5r_1 \Delta x \min(0, u) \cdot \\ &(r_1 u + 1)(S(x_{i+1,j}^n) - S(x_{i,j}^n)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} &= (\phi_{i,j}^{n+1})' - r_2 \max(0, v)((\phi_{i,j}^{n+1})' - (\phi_{i,j-1}^{n+1})') + \\ &0.5r_2 \Delta y \max(0, v)(r_2 v - 1)(S(y_{i,j}^{n+1})' - \\ &S(y_{i,j-1}^{n+1})') - r_2 \min(0, v)((\phi_{i,j}^{n+1})' - (\phi_{i,j-1}^{n+1})') + \\ &0.5r_2 \Delta y \min(0, v)(r_2 v + 1)(S(y_{i,j+1}^{n+1})' - S(y_{i,j}^{n+1})') \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $S(x_{i,j}^n) = \phi(\theta_{i,j}^n)(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n)/\Delta x$; $S(y_{i,j}^{n+1})' = \phi((\theta_{i,j}^{n+1})')((\phi_{i,j+1}^{n+1})' - (\phi_{i,j}^{n+1})')/\Delta y$; $r_1 = dt/\Delta x$; $r_2 = \Delta t/\Delta y$; $\phi(\theta_{i,j}^n) = \max(0, \min(1.0, 2\theta_{i,j}^n), \min(2.0, 2\theta_{i,j}^n))$; 上标 n 及 $n+1$ 分别表示当前时刻及下一时刻. 若以乘、除作为一次标准运算(加、减的运算时间远低于乘、除), 积分平均法每一时间步的标准运算数约为 $38mn$, 其中 m 、 n 分别为二维计算域 2 个方向的网格数. 五阶 H-J WENO 格式和三阶 TVD 型龙格库塔法的标准计算数约为 $226mn$ 和 $3 \times 226mn$.

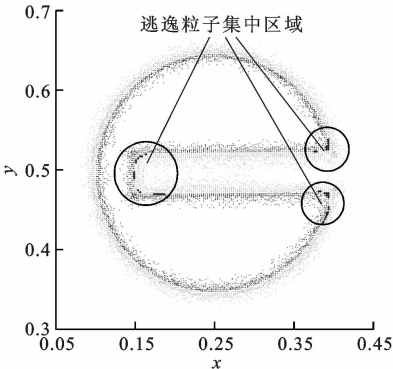
(2) 基于界面局部曲率的粒子初始化方法. 粒子水平集法通过逃逸粒子来判别并修正界面, 初始化粒子的数量及位置显著影响界面修正效果. 粒子越多, 越接近界面就有更大的机会检测到界面描述的细小误差, 但加入粒子越多, 占用的计算资源就越多, 计算时间也越长. 通过大量数值计算和分析发现, 逃逸粒子多出现在界面曲率变化较大的区域, 因此, 将粒子初始化在此区域可有效提高对界面的修正效率. 以二维 Zalesak 缺口圆盘为例(结构化网格数为 128×128), 如图 1 所示, 传统粒子初始化方法需要在界面两侧 3 个网格宽度的范围内布置 15 312 个粒子, 而其中只有约 0.5% 的粒子在计算过程中可以起到修正界面的作用.

本文提出将粒子分布于界面曲率变化较大的区域, 一方面可以提高粒子的利用效率, 另一方面可以用有限的粒子修正最关心的某一界面局部, 提高界面的捕捉精度. 根据界面的局部曲率可以将最易出现逃逸粒子的区域表示为

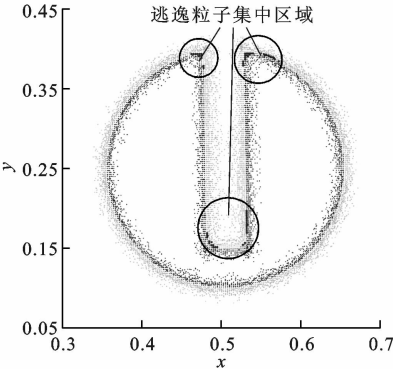
$$|\kappa(\mathbf{x}, t)| > C \overline{|\kappa(\mathbf{x}, t)|}, \quad \left| \phi(\mathbf{x}, t) \right| < 2\Delta x$$

(10)

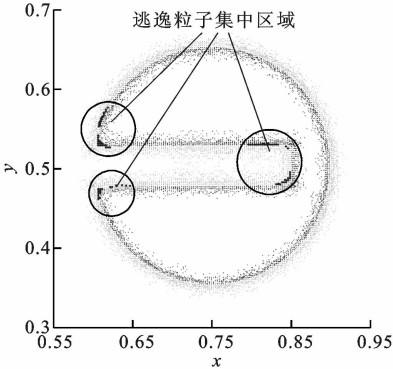
式中: $\kappa(\mathbf{x}, t)$ 为 t 时刻界面局部 $\mathbf{x}$ 处的曲率; C 为常数, 其不同取值涉及求解问题本身界面的分布情况, C 对界面的捕捉精度及计算资源消耗有直接影响. 界面曲率的分布情况决定粒子的初始化位置, 随着 C 的增大粒子初始化位置越偏向于界面局部曲率大的部分, 初始化粒子数量越少, 计算效率提高而总体界面捕捉精度有所下降; 反之, 则需要较多的粒子去修正大部分界面, 可在降低计算效率的同时保证界面捕捉精度. 本文中取 $C=5$. 为了保证计算精度, 将方程(10)所确定的区域向 x 、 y 方向各拓展 2 个网格宽度, 形成初始化粒子的区域. 采用新的粒子初始化方法, 仅需 1 936 个粒子便可以检测到几乎全部的逃逸粒子.



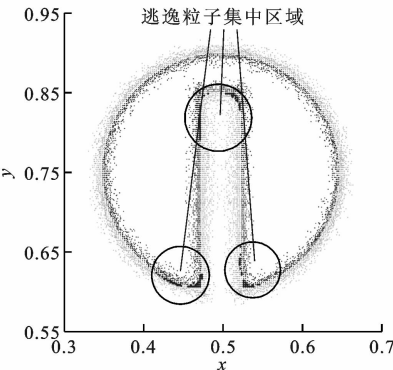
(a) $t = \frac{\pi}{4}$ 时逃逸粒子数为 51



(b) $t = \frac{\pi}{2}$ 时逃逸粒子数为 59



(c) $t = \frac{3\pi}{4}$ 时逃逸粒子数为 56



(d) $t = \pi$ 时逃逸粒子数为 67

图 1 4 个特征时刻粒子的分布情况(网格数为 128×128)

2 测试算例验证

2.1 Zalesak 缺口圆盘^[8]

初始界面为一半径 0.15,缺口部分长 0.25、宽 0.05 的无量纲缺口圆盘,在速度场式(11)的作用下沿计算域中心旋转

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\pi}{3.14}(0.5-y) \\ v &= \frac{\pi}{3.14}(x-0.5) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

为了更好地对比改进算法与原始算法的计算性能,将不同计算方法组合来求解缺口圆盘问题,分别为:组合方法 1(TVD-WENO+原始粒子初始化法);组合方法 2(TVD-WENO+改进粒子初始化法);组合方法 3(积分平均法+原始粒子初始化法);组合方法 4(积分平均法+改进粒子初始化法)。表 1 中,误差及面积守恒指标依据文献[8]的计算方法,计算时间为同条件下 30 次计算耗时的平均值。计算过程中 CFL 数均设为 0.5。

表 1 的计算结果显示,改进的粒子初始化方法在提高计算效率的同时几乎不影响界面的捕捉精度及系统的质量守恒性,同时验证了水平集法在捕捉界面时的误差主要产生于界面局部曲率变化较大的区域。积分平均法简便易行,显著地提高了算法的计算效率。虽然在时间及空间上仅为一阶精度,但由于粒子的修正作用,改进后的粒子水平集法的计算精度较水平集法^[6]、VOF(Volume of Fluid)法^[9]、Couple Level Set and VOF 法^[10]有明显的优势。对比 2 种求解策略对算法计算效率的提高程度,积分平均法贡献更大,约为改进粒子初始化方法的 3.35 倍。在采用相同的粒子初始化方式条件下,积分平均法约可节省计算时间 24.63 s(1 圈)和 50.40 s(2 圈);在采用相同距离函数附加方程求解方式条件下,改进的粒子初始化方法约可节省计算时间 7.37 s(1 圈)和 14.32 s(2 圈)。图 2 给出了 2 种方法求解 Zalesak 缺口圆盘旋转 2 圈后的界面分布情况。图 2 中两界面的一致性验证了本文所提出的改进方法可

以准确描述界面的分布及其迁移过程,保证界面尖角部分的捕捉精度。

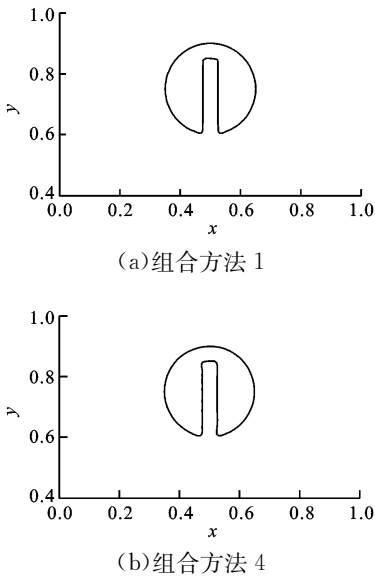


图 2 采用 2 种方法在旋转 2 圈后的计算结果对比 (网格数为 128×128)

2.2 涡旋流场^[9,11]

Zalesak 缺口圆盘问题可以很好地检验算法求解对流问题的计算性能,而涡旋问题则可以检验算法处理界面发生剪切、拉伸,甚至拓扑结构发生变化时的准确性。初始界面为一圆心坐标位于(0.5, 0.75)、半径 0.15 的圆,在速度场

$$\left. \begin{aligned} u &= -2\sin^2(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi y)\cos(\pi t/T) \\ v &= 2\sin^2(\pi y)\sin(\pi x)\cos(\pi x)\cos(\pi t/T) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

作用下沿顺时针旋转拉伸,当达到半个周期($T/2$)时反向旋转,逐渐回到初始状态($T=8$ s)。

表 2 给出了 2 种计算方法在 3 种网格下求解涡旋流场一个周期的计算结果。计算结果显示,改进算法的计算精度接近二阶,在原有算法基础上改进算法节省了约 90%的计算时间,而质量亏损及误差仅下降了约 20%。图 3 给出了 128×128 网格下 2 个典型时刻不同计算方法所确定的界面分布情况。由图 3 可见,2 种方法均给出旋转流场作用下界面的

表 1 不同求解方法下 Zalesak 缺口圆盘旋转 1 圈及 2 圈的计算结果(网格数为 128×128)

求解方法	误差		面积损失/%		计算时间/s	
	1 圈	2 圈	1 圈	2 圈	1 圈	2 圈
组合方法 1	7.38×10^{-6}	8.28×10^{-6}	0.102	0.140	34.56	70.05
组合方法 2	7.38×10^{-6}	8.37×10^{-6}	0.102	0.149	27.25	56.16
组合方法 3	2.14×10^{-5}	2.45×10^{-5}	0.134	0.297	9.96	20.13
组合方法 4	2.15×10^{-5}	2.50×10^{-5}	0.135	0.304	2.59	5.28

表 2 改进方法与原始方法求解涡旋流场问题的计算性能

求解方法	网格	面积损失/%	误差	阶数	计算时间/s
组合方法 1	64×64	0.602	1.569×10^{-4}		14.83
	128×128	0.231	2.988×10^{-5}	2.392	112.49
	256×256	0.091	7.985×10^{-6}	2.148	904.24
组合方法 4	64×64	0.748	1.631×10^{-4}		1.09
	128×128	0.291	3.806×10^{-5}	2.100	8.93
	256×256	0.109	1.202×10^{-6}	1.881	68.82

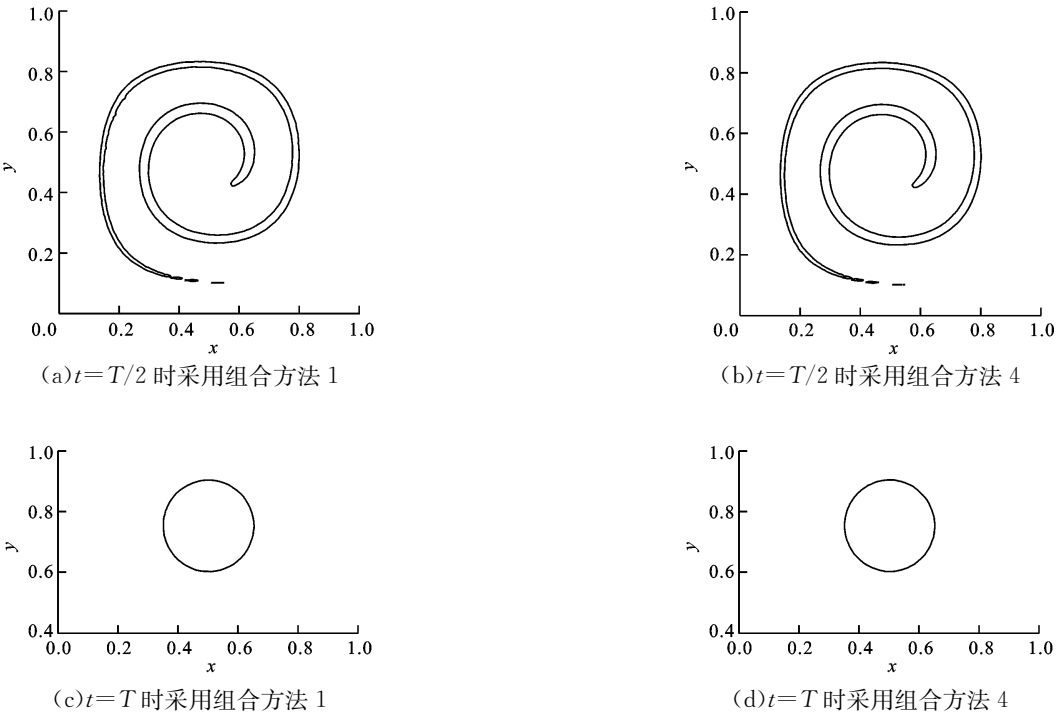


图 3 典型时刻 2 种组合方法的界面分布情况(网格数为 128×128)

拉伸细节,改进方法捕捉界面的光顺性优于原始方法. 良好的光顺性有利于获得准确的界面几何信息,从而准确计算了表面张力作用.

3 液柱垮塌的数值模拟

液柱垮塌^[12]过程可认为是液体仅在重力作用下的定向运动,在此过程中界面存在较大的变形,且变形趋势正好决定了流动的速度分布. 作为基本流动现象之一,液柱垮塌现象可抽象为很多复杂流动现象的基本模型,如溃坝、波浪、船舶及铸造等. 本文对二维溃坝问题进行数值模拟,计算域为 $5L\times2.5L$ 的矩形区域,网格为 256×128 , z 为 t 时刻溃坝前沿与初始位置的距离. 设定气、液密度比 $e_l:e_g=1:1\,000$,气、液动力黏性系数比 $\mu_l:\mu_g=1:1\,000$, $t=0$ 时刻后,液体仅在重力作用下自由流

动,忽略表面张力作用. 采用投影法^[10,13]求解速度场,本文改进的粒子水平集法捕捉气液交界面运动.

图 4 给出了溃坝波前沿随时间的推进情况,图 4 表明数值模拟结果同实验结果^[14]吻合良好. 溃坝

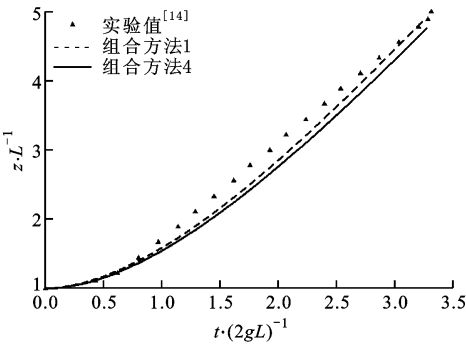


图 4 溃坝波前沿随时间变化情况

起始阶段的计算值与实验值十分接近,但随后计算所得溃坝波前沿略落后于实验值,随着时间的推进逐渐趋于一致.改进算法的计算结果与原始算法结果在趋势上基本一致,只是溃坝波前沿稍落后些.

4 结 论

本文引入积分平均法求解距离函数附加方程,采用局部粒子初始化方法布置粒子分布,提出一种改进的高效粒子水平集法.通过测试算例验证,改进粒子水平集法能够在保证界面捕捉精度的同时显著提高计算效率,通过粒子对界面的局部修正,可有效抑制数值扩散的影响,提高数值稳定性,降低算法对离散格式精度的依赖性.改进粒子水平集法捕捉界面的精度接近二阶精度,计算效率提高近 90%,同时将有限的粒子集中于最易发生粒子逃逸的区域可有效提高界面的修正精度.本文方法为解决复杂工程实际问题提供了有效途径.

参考文献:

- [1] ENRIGHT D, FEDKIW R, FERZIGER J, et al. A hybrid particle level set method for improved interface capturing [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 183(1):83-116.
 - [2] SETHIAN J A. Curvature and the evolution of fronts [J]. *Communication of Mathematical Physics*, 1985, 101(4): 487-499.
 - [3] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49.
 - [4] 谷汉斌, 李炎保, 李绍斌, 等. 界面追踪的 Level Set 和 Particle Level Set 法[J]. *水动力学研究与进展: A 辑*, 2005, 20(2):152-160.
- GU Hanbin, LI Yanbao, LI Shaobin, et al. The level set and particle level set method for tracing interface

- [J]. *Journal of Hydrodynamics: A*, 2005, 20(2):152-160.
- [5] WANG Zhaoyuan, YANG Jianming, STERN F. An improved particle correction procedure for the particle level set method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(16): 5819-5837.
 - [6] SUSSMAN M, SMERKA P, OSHER S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 114(1):146-159.
 - [7] 刘俊儒, 王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪[M]. 合肥:中国科技大学出版社, 2001.
 - [8] ZALESAK S. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 31(3):335-362.
 - [9] RIDER W J, KOTHEY D B. Reconstructing volume tracking [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 141(2):112-152.
 - [10] SUSSMAN M, PUCKETT E G. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 162(2):301-337.
 - [11] OLSSON E, KREISS G. A conservative level set method for two phase flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 210(1):225-246.
 - [12] 景思睿, 张鸣远. 流体力学[M]. 西安:西安交通大学出版社, 2001.
 - [13] BELL J B, COLELLA P. A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 85(12):257-283.
 - [14] MARTIN J C, MOYCE W J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences*, 1952, 244(3):312-324.

(编辑 刘杨 荆树蓉)